

ELEMENTOS SEMIINFINITOS DE FLEXION

AVELINO SAMARTIN

y

JUAN DE LA TORRE

RESUMEN

Existen situaciones para las que los resultados de interés corresponden a una zona pequeña de la estructura en comparación con su totalidad. La utilización de elementos infinitos constituye una posibilidad que evita un esfuerzo excesivo de cálculo. Esta idea se aplica en este artículo al análisis estático de la flexión de placas, desarrollando un elemento finito rectangular con un lado situado a distancia infinita. La función de decrecimiento de los movimientos en el interior del elemento es exponencial con un parámetro cuyo valor se determina mediante minimización de la energía potencial total. Se presentan resultados obtenidos con el elemento, contrastando su bondad y eficacia en comparación con un cálculo convencional. Se comentan finalmente distintas extensiones posibles del elemento.

SUMMARY

There exist structural analysis where the main results are concentrated only in a small part of the structure. The use of infinite elements represents a possibility to avoid an excessive computational effort. This idea is applied in this paper to the static analysis of plate bending. A rectangular infinite element is developed. In this element the displacement vary according to an exponential decay function. The value of the decay parameter is obtained by minimization of the total potential energy. Some examples are shown in order to illustrate and test the element efficiency. Possible extensions of the method are also shown.

INTRODUCCION

El método de los elementos finitos ha mostrado de un modo evidente su eficacia en el cálculo de complejas estructuras. Sin embargo, existen situaciones para las que los resultados de interés corresponden únicamente a una zona pequeña de la estructura en comparación con su totalidad. Los ejemplos son numerosos dentro del grupo de sistemas acoplados: estructura-suelo-fluido, en las estructuras periódicas, etc.

Existen varias posibilidades para obviar el excesivo esfuerzo computacional que conlleva el equilibrio entre una adecuada modelización de toda la estructura y una necesaria exactitud de los resultados requeridos en la zona. Algunas como la utilización de mallas progresivamente variables no resuelven satisfactoriamente el problema y otras, como la subestructuración o la introducción del método de los elementos de contorno, exigen modificaciones substanciales del programa de computador. La consideración de elementos semiinfinitos representa un modo natural de resolver estas situaciones y no implica tratamiento específico para estos nuevos elementos; que

pueden ser incluidos fácilmente dentro de un programa modular de elementos finitos. Existen numerosas contribuciones particularmente respecto a la clase de problemas estructurales con continuidad C^0 . La reciente referencia¹ constituye una excelente revisión del tema. Aquí, se muestra un tipo de elemento semiinfinito rectangular de flexión que puede ser usado en numerosos problemas relacionados con el cálculo de los efectos locales de cargas concentradas en las losas de los tableros de puentes. En efecto, las losas de voladizos y las comprendidas entre las almas de las vigas del tablero, presentan una luz generalmente pequeña en comparación con la distancia entre traviesas, que en la construcción actual se disponen normalmente para reparto de los apoyos sobre pilas. Las secciones de máximos esfuerzos corresponden a la zona de aplicación de las cargas concentradas² que precisa por este motivo ser modelizada con una malla fina de elementos, que no debe extenderse, por motivos de economía, a toda la losa del puente (Figura 1).

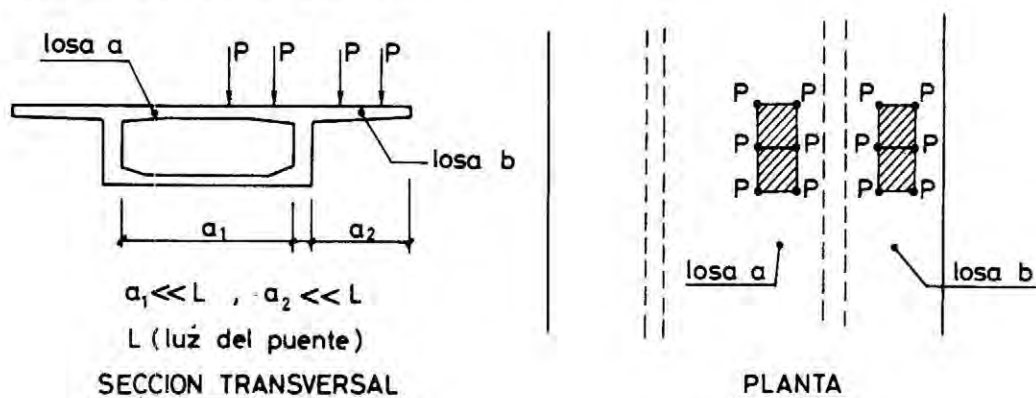


Fig. 1.--- Tablero de puente.

ELEMENTO SEMIINFINITO DE FLEXION

Se considera el elemento rectangular semiinfinito representado en la Figura 2.

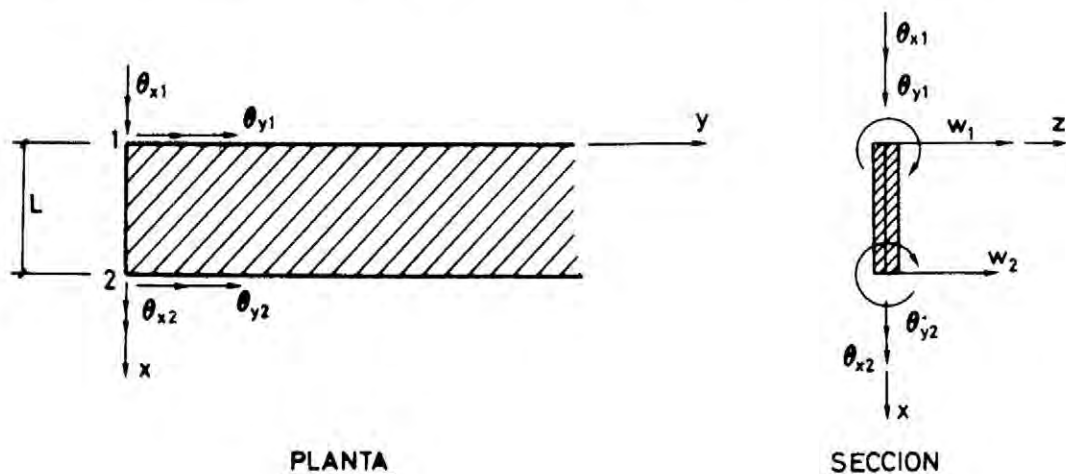


Fig. 2.— Elemento rectangular semiinfinito.

Se supone que la ley de flechas $w(x,y)$ varía sobre la superficie del elemento según la expresión:

$$w(x,y) = X_0(x)Y_0(y) + X_1(x)Y_1(y) \quad (1)$$

siendo

$$X_0(x) = (N_1, N_2, N_3, N_4) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_{y1} \\ w_2 \\ \theta_{y2} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_0 \mathbf{d}_0 \quad (2)$$

$$X_1(x) = [N_5, N_6] \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{x2} \end{Bmatrix} = \mathbf{N}_1 \mathbf{d}_1 \quad (3)$$

$$Y_0(y) = (1 + \sum_{r=1}^R \alpha_r \bar{y}^r) e^{-\bar{y}} \quad (4)$$

$$Y_1(y) = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{r=1}^R \beta_r \bar{y}^r \right) e^{-\bar{y}} \quad (5)$$

con $\bar{y} = \mu y$

μ, α_r y β_r (con $r = 1, 2, \dots, R$)

parámetros que pueden ser datos o bien obtenidos automáticamente de acuerdo con las consideraciones que más adelante se exponen. El número R de términos polinómicos está especificado(*).

Las condiciones siguientes deben de ser satisfechas:

$$\mu > 0, \quad R \geq 1, \quad \alpha_1 = 1 \quad \text{y} \quad \beta_1 = 1$$

Las funciones de la coordenada x , N_1, N_2, N_3 y N_4 , corresponden a los polinomios de Hermite y, N_5 y N_6 son polinomios lineales, cuyas expresiones son:

$$N_1 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3$$

$$N_2 = -(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L$$

$$N_3 = 3\xi^2 - 2\xi^3$$

$$N_4 = -(-\xi^2 + \xi^3)L$$

$$N_5 = 1 - \xi$$

$$N_6 = \xi$$

NOTA(*): Es posible extender la formulación anterior, considerando un número de términos polinómicos diferentes para las funciones Y_0 e Y_1 .

$$\text{con } \xi = \frac{x}{L}$$

Se comprueba que la expresión (1) satisface las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} w(0,0) = w_1; \quad \theta_x(0,0) = \theta_{x1} \quad \text{y} \quad \theta_y(0,0) = \theta_{y1} \\ w(L,0) = w_2; \quad \theta_x(L,0) = \theta_{x2} \quad \text{y} \quad \theta_y(+L,0) = \theta_{y2} \end{aligned}$$

con

$$\theta_x(x,y) = \frac{\partial w(x,y)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \theta_y(x,y) = -\frac{\partial w(x,y)}{\partial x}$$

El elemento descrito es incompatible, puesto que no existe continuidad de $\theta_y(x,y)$ a lo largo de los lados $x=0$ y $x=L$, aunque, supuesto que los parámetros μ , α_r y β_r sean idénticos entre elementos contiguos, las funciones $w(x,y)$ y $\theta_x(x,y)$ son continuas.

Si se denomina $\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \end{bmatrix}$ el vector movimientos la flecha se puede escribir como sigue:

$$\mathbf{w} = [\mathbf{N}_0 \mathbf{Y}_0, \mathbf{N}_1 \mathbf{Y}_1] \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (7)$$

El vector curvatura $\underline{\epsilon}$ se define como es usual:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = (\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1) \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \mathbf{d} \quad (8)$$

siendo

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0 &= \begin{bmatrix} -Y_0 & N_0'' \\ -Y_0'' & N_0 \\ 2Y_0' & N_0' \end{bmatrix} = \mathbf{C}_0 \bar{\mathbf{B}}_0 = \begin{bmatrix} Y_0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_0'' & 0 \\ 0 & 0 & Y_0' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -N_0'' \\ -N_0 \\ 2N_0' \end{Bmatrix} \\ \mathbf{B}_1 &= \begin{bmatrix} -Y_1 & N_1'' \\ -Y_1'' & N_1 \\ 2Y_1' & N_1' \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1 \bar{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_1'' & 0 \\ 0 & 0 & Y_1' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -N_1'' \\ -N_1 \\ 2N_1' \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9)$$

El vector de esfuerzos σ se obtiene mediante la expresión:

$$\sigma = \begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = D \epsilon \quad (10)$$

con $D = (D_{ij})$ matriz constitutiva de la placa. En el caso de isotropía, los elementos no nulos de esta matriz son:

$$\begin{aligned} D_{11} = D_{22} &= \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D \\ D_{12} = D_{21} &= \nu D \\ D_{33} &= \frac{1-\nu}{2} D \end{aligned} \quad (11)$$

con h el espesor de la placa y E y ν constantes elásticas (módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson) del material de la misma.

Si se desean obtener los esfuerzos cortantes (q_x, q_y) y las reacciones de Kirchhoff (r_x, r_y) se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} &= -D \begin{bmatrix} Y_0 N_0''' + Y_0'' N_0' & Y_1 N_1''' + Y_1'' N_1' \\ Y_0' N_0'' + Y_0''' N_0 & Y_1' N_1'' + Y_1''' N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix} &= D \begin{bmatrix} -Y_0 N_0''' + (2-\nu) Y_0'' N_0' & -Y_1 N_1''' + (1-2\nu) Y_1'' N_1' \\ (2-\nu) Y_0' N_0'' - Y_0''' N_0 & (1-2\nu) Y_1' N_1'' - Y_1''' N_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_0 \\ d_1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

Usando la técnica típica del método de los elementos finitos³ se deduce la siguiente expresión de la matriz de rigidez del elemento:

$$K = \int_0^L \int_0^\infty B^T D B \, dx dy \quad (13)$$

Desarrollando (13) se obtiene:

$$K = \int_0^L \begin{bmatrix} B_0^T \bar{D}_{00} B_0 & B_0^T \bar{D}_{01} B_1 \\ B_1^T \bar{D}_{10} B_0 & B_1^T \bar{D}_{11} B_1 \end{bmatrix} dx \quad (14)$$

$$\text{siendo } \bar{D}_{ij} = \int_0^\infty C_i D C_j \, dy \quad (15)$$

Si se denomina $l_{ij}^{mn} = \int_0^\infty Y_i^m Y_j^n dy$ y $Y_i^m = \frac{d^m Y_i}{dy^m}$ la expresión (15) se transforma en la siguiente:

$$\bar{D}_{ij} = \begin{bmatrix} D_{11} l_{ij}^{00} & D_{12} l_{ij}^{02} & 0 \\ D_{21} l_{ij}^{20} & D_{22} l_{ij}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} l_{ij}^{11} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Los valores de los coeficientes l_{ij}^{mn} se presentan en la Tabla 1.

Mediante el uso de las igualdades anteriores se determina la matriz de rigidez del elemento. Las integrales (14) pueden efectuarse numéricamente mediante las fórmulas de Gauss o analíticamente. Los coeficientes k_{ij} de la matriz de rigidez obtenidos según este último procedimiento para el caso simple de un sólo término en Y_0 e Y_1 , ($R=1$) se resumen en la Tabla 2.

$$\langle Y_0^m Y_0^n \rangle = \mu^{m+n-1} \left\{ d_{00}^{mn} + a_{00}^{mn} \alpha_r \frac{r!}{2^{r+2}} + c_{00}^{mn} \alpha_r \frac{\sigma!}{2^{\sigma+1}} \right\}$$

$$\langle Y_1^m Y_1^n \rangle = \mu^{m+n-3} \left\{ d_{11}^{mn} + b_{11}^{mn} \beta_r \frac{r!}{2^{r+2}} + c_{11}^{mn} \beta_r \frac{\sigma!}{2^{\sigma+1}} \right\}$$

$$\langle Y_0^m Y_1^n \rangle = \mu^{m+n-2} \left\{ d_{01}^{mn} + a_{01}^{mn} \alpha_r \frac{r!}{2^{r+2}} + b_{01}^{mn} \beta_r \frac{r!}{2^{r+2}} + c_{01}^{mn} \alpha_r \beta_r \frac{\sigma!}{2^{\sigma+1}} \right\}$$

Se utiliza el convenio de índices repetidos con:

$$r, r' = 2, 3, 4, \dots, R; \quad \sigma = r + r' \quad \text{y} \quad \pi = rr'$$

Se comprueba que $c_{00}^{mn} = c_{11}^{mn} = c_{01}^{mn} = c$ para todo m, n .

COEF.	i	j	m=0 n=0	m=0 n=2	m=1 n=1	m=2 n=0	m=2 n=2
d_{ij}^{mn}	0	0	5/4	-1/4	1/4	-1/4	1/4
	1	1	1/4	-1/4	1/4	-1/4	5/4
	0	0	1/2	-1	0	0	1/2
a_{ij}^{mn}	0	0	2(r+3)	2(r-1)	-2(r-1)	2(r-1)	2(r-5)
	0	1	r+1	r-3	-(r-3)	r-3	r-7
b_{ij}^{mn}	1	1	2(r+1)	2(r-3)	-2(r-3)	2(r-3)	2(r-7)
	0	1	r+3	r-1	-(r-1)	r-1	r-5
c	i	j	1	$1 - \frac{4\pi}{\alpha(\sigma-1)}$	$-(1 - \frac{4\pi}{\alpha(\sigma-1)})$	$1 - \frac{4\pi}{\alpha(\sigma-1)}$	$1 + \frac{2\pi - \sigma^2 + 3\sigma - 4}{\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)(\sigma-3)} 8\pi$

Tabla 1. Coeficientes $l_{ij}^{mn} = \langle Y_i^m Y_j^n \rangle = \int_0^\infty Y_i^m Y_j^n dy$

$$\mathbf{p} = \mathbf{k} \mathbf{d} \quad \text{con} \quad \mathbf{k} = (k_{ij}),$$

$$\mathbf{d}^T = (w_1 \theta_{y1} w_2 \theta_{y2} \theta_{x1} \theta_{x2}) \quad \text{y} \quad m = \mu L$$

$$k_{11} = \frac{D}{L^2} \left(\frac{15}{m} + \frac{13}{140} m^3 + \frac{3}{5} m \right) = k_{33}$$

$$k_{12} = -\frac{D}{L} \left(\frac{15}{2m} + \frac{11}{840} m^3 + \frac{m}{20} + \frac{\nu m}{4} \right) = -k_{34}$$

$$k_{13} = -\frac{D}{L^2} \left(\frac{15}{m} - \frac{9}{280} m^3 + \frac{3m}{5} \right)$$

$$k_{14} = -\frac{D}{L} \left(\frac{15}{2m} - \frac{13m^3}{1680} + \frac{m}{20} \right)$$

$$k_{15} = \frac{D}{L} \left(\frac{7m^2}{40} + \nu \right) = -k_{36}$$

$$k_{16} = \frac{D}{L} \left(\frac{3m^2}{40} - \nu \right) = -k_{35}$$

$$k_{22} = D \left(\frac{5}{m} + \frac{m^3}{420} + \frac{m}{15} \right) = k_{44}$$

$$k_{23} = \frac{D}{L} \left(\frac{15}{2m} - \frac{13m^3}{1680} + \frac{m}{20} \right)$$

$$k_{24} = D \left(\frac{5}{2m} - \frac{m^3}{560} - \frac{m}{60} \right)$$

$$k_{25} = -D \left(\frac{m^2}{40} + \nu \right) = -k_{46}$$

$$k_{26} = -D \frac{m^2}{60} = -k_{45}$$

$$k_{55} = D \left(\frac{5m}{12} + \frac{1-\nu}{2m} \right) = k_{66}$$

$$k_{56} = D \left(\frac{5m}{24} - \frac{1-\nu}{2m} \right)$$

Tabla 2. Matriz de rigidez del elemento semiinfinito con $R = 1$ y material isótropo.

ELECCION DE LOS PARAMETROS DE LAS FUNCIONES DE DESARROLLO Y_0 e Y_1

La elección de los parámetros μ , α_r y β_r debe llevarse a cabo de modo que se minimice la energía potencial total de la estructura V , que puede expresarse como sigue:

$$V = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{D}^T \mathbf{P} \quad (17)$$

siendo \mathbf{D} , \mathbf{P} y \mathbf{K} los vectores movimientos, fuerzas y matriz de rigidez de toda la estructura.

Las condiciones de mínimo de (17) son:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{d}} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_r} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial \beta_r} = 0 \quad (r = 2, 3, \dots, R)$$

es decir:

$$\mathbf{K} \mathbf{D} - \mathbf{P} = 0$$

$$\mathbf{D}^T \frac{\partial}{\partial \mu} (\mathbf{K}) \mathbf{D} = 0; \quad \mathbf{D}^T \frac{\partial}{\partial \alpha_r} (\mathbf{K}) \mathbf{D} = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{D}^T \frac{\partial}{\partial \beta_r} (\mathbf{K}) \mathbf{D} = 0 \quad (18)$$

Como es conocido la matriz de la estructura \mathbf{K} , puede expresarse como suma directa o booleana de las matrices de rigidez de cada elemento \mathbf{k}_e . Simbólicamente:

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{k}_e$$

o bien, si se deriva respecto a un parámetro genérico λ_m , en donde λ_m representa μ , α_r o β_r ($r = 2, 3, \dots$) según el caso:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} (\mathbf{K}) = \sum_e \frac{\partial}{\partial \lambda_m} (\mathbf{k}_e) \quad (19)$$

La ecuación (19) indica que se puede obtener cada una de las matrices $\partial/\partial \lambda_m (\mathbf{K})$ a partir de las derivadas de las matrices de rigidez de cada elemento, mediante la regla de composición usual.

Efectuada la resolución del sistema (18) es posible calcular los valores óptimos de los parámetros λ_m para cada hipótesis de carga \mathbf{P} . Formalmente, ello equivale a resolver el sistema de M ($M = R + R - 1$) ecuaciones no lineales.

$$\mathbf{P}^T (\mathbf{K}^{-1})^T \frac{\partial}{\partial \lambda_m} (\mathbf{K}) \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots, M) \quad (20)$$

El algoritmo siguiente de resolución del sistema (20) puede ser utilizado como se indica a continuación:

1. Inicializar los parámetros λ_m .
2. Resolver $\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{P}$.
3. Determinar nuevos valores λ_m del sistema $\mathbf{D}^T \frac{\partial}{\partial \lambda_m} (\mathbf{K}) \mathbf{D} = 0$.
4. Repetir el proceso, desde el paso 2 con nueva matriz \mathbf{K} obtenida para las nuevas λ_m , si éstas son diferentes de las supuestas. En caso contrario finaliza el cálculo.

Existe otra posibilidad de cálculo de estos valores λ_m más simple que la expuesta, ya que no exige la determinación de las matrices derivadas ($\partial \mathbf{K} / \partial \lambda_m$), que se expone a continuación:

La energía potencial total de la estructura puede expresarse como sigue:

$$V = -\frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{P} \quad (21)$$

Mediante esta ecuación el cálculo de V es muy simple durante la fase de resolución del sistema $\mathbf{K} \mathbf{D} = \mathbf{P}$, puesto que implica un conjunto reducido de instrucciones de programa y prácticamente un esfuerzo adicional nulo de computación. La dependencia de V respecto a los parámetros λ_m , se produce a través de los movimientos \mathbf{D} . Es posible obtener el valor mínimo de V mediante uno de los algoritmos de búsqueda y tanteos sucesivos que se estudian dentro de los métodos de programación matemática no lineal.

Un valor tentativo del parámetro (en el caso de $M = 1$) que permite iniciar las iteraciones se presenta a continuación para los dos casos más importantes de losas de forjado de puente:

(a) Losa en voladizo de luz 2. (Figura 1, losa a).

Se puede suponer que el vector de desplazamientos solución corresponde a la deformada de una viga, por lo que si se considera un sólo elemento resulta $\mathbf{d} = [0, 0, L/3, -1, 0, 0]^T$.

El mínimo de $2V = \mathbf{d}^T \mathbf{k} \mathbf{d} = L^2/9 \cdot k_{33} - L/3 \cdot k_{34} + 1/4 \cdot k_{44}$ corresponde a:

$$m = \mu L = 1.79 \quad (22)$$

(b) Losa biempotrada de luz L (Figura 1, losa b).

Análogamente se deduce que:

$$m = \mu \frac{L}{2} = 2.51 \quad (23)$$

minimiza la energía potencial total:

$$2V = \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} = k_{11}$$

correspondiente a la deformada $\mathbf{d} = [0, 0, 1, 0, 0, 0]^T$.

Conviene observar que los valores de λ_m dependen de las características de la estructura global y son iguales para cada uno de los elementos en los que se ha discretizado la estructura. Por consiguiente, el valor tentativo del parámetro de cada elemento μ viene dado por las fórmulas (22) ó (23) según el caso, en las que L representa la luz total de la estructura.

EJEMPLO ILUSTRATIVO

A continuación se aplica el elemento anterior al cálculo de una placa en voladizo de luz L , con una carga concentrada situada en el borde 1, como se indica en la Figura 3. Las características que se han considerado para la placa son:

$$E = 3 \times 10^6 \text{ tm}^{-2}.$$

$$P = 16,0 \text{ t}$$

$$h = 0,4 \text{ m}$$

$$L = 1,0 \text{ m}$$

Se han analizado la influencia del coeficiente de Poisson en los resultados, al estudiar los casos de $\nu = 0$, $\nu = 0.1$ y $\nu = 0.2$.

Los resultados se presentan en forma adimensional con:

$$\bar{w} = w/(PL^2/D)$$

$$\bar{M}_y = M_y/P$$

$$\bar{V} = V/P^2 L^2/D$$

en donde w es la flecha en el extremo libre, M_y el momento flector longitudinal en el arranque del voladizo y V la energía potencial total.

Se ha calculado el voladizo utilizando sucesivamente un distinto número N de elementos y cada uno de ellos con un desarrollo mínimo de la función de forma, es decir con $R = S = 1$ (valor de μ). Los resultados de los distintos casos analizados se muestran en las Tablas 3, 4 y 5. Se observa que en la región de mínimo de energía potencial total, la desviación de los resultados de flechas y momentos flectores es muy pequeña, obteniéndose valores aceptables incluso con un único elemento ($N = 1$).

La introducción de un número R mayor de términos en las funciones de forma no altera de un modo sensible los resultados. En la Tabla 6 se ilustra la escasa importancia que representan los términos adicionales α_r y β_r (con $r = 2$). En el ejemplo particular que se analiza existe una simetría, representada por la rotación θ_y nula a lo largo del eje $y = 0$, que implica una independencia en los resultados de los valores de los parámetros β_r para $r > 1$.

En la Tabla 6 se ha efectuado el cálculo con los valores de α_2 que minimizan para cada μ la energía potencial total \bar{V} . La placa ha sido analizada con dos tipos de discretización ($N = 1$ y $N = 3$) deduciéndose resultados muy semejantes en ambos casos.

El cálculo de la placa anterior puede llevarse a cabo mediante elementos finitos de flexión convencionales, en un número suficiente para simular una gran distancia según el eje y . Se ha utilizado el programa SAP con 20×4 elementos rectangulares de lados $0,25 \times 0,25$ m, obteniéndose los resultados (Fig. 4) para $\nu = 0$:

$$\bar{w} = 0,14315 ; \quad \bar{M}_y = 0,4657 ; \quad \bar{V} = -0,0355787$$

μ		1.74	1.78	1.79	1.80	1.84
N	\bar{w}	.1425	.1426	.1426	.1426	.1426
	\bar{M}_y	.431	.431	.431	.431	.431
	\bar{V}	-0.035621	-0.035646	-0.035648	-0.035647	-0.035639
2	\bar{w}	.1425	.1426	.1426	.1426	.1426
	\bar{M}_y	.443	.443	.443	.443	.443
	\bar{V}	-0.035635	-0.035661	-0.035662	-0.035661	-0.035640
3	\bar{w}	.1425	.1426	.1427	.1426	.1426
	\bar{M}_y	.447	.448	.448	.448	.448
	\bar{V}	-0.035637	-0.035662	-0.035664	-0.035663	-0.035642
4	\bar{w}	.1425	.1426	.1427	.1426	.1426
	\bar{M}_y	.449	.450	.450	.450	.450
	\bar{V}	-0.035637	-0.035663	-0.035664	-0.035664	-0.035642

NOTA. La energía potencial total mínima se alcanza para $\mu = 1.79$

Tabla 3.— Losa en voladizo ($\nu = 0.0$)

N \ μ		1.80	1.82	1.83	1.84	1.86
1	\bar{w}	0.1483	0.1483	0.1483	0.1483	0.1483
	\bar{M}_y	.4438	.4437	.4437	.4436	.4433
	\bar{V}	-0.03707	-0.037079	-0.037081	-0.037080	-0.037073
2	\bar{w}	.1483	.1484	.1484	.1484	.1484
	\bar{M}_y	.4568	.4569	.4569	.4569	.4568
	\bar{V}	-0.037086	-0.037096	-0.037097	-0.037097	-0.037089
3	\bar{w}	.1484	.1484	.1484	.1484	.1484
	\bar{M}_y	.4614	.4616	.4616	.4617	.4617
	\bar{V}	0.037088	-0.037098	-0.037099	-0.037099	-0.037091
4	\bar{w}	.1484	.1484	.1484	.1484	.1484
	\bar{M}_y	.4633	.4635	.4636	.4636	.4636
	\bar{V}	-0.037089	-0.037097	-0.037099	-0.037099	-0.037092

NOTA. La energía potencial total mínima se alcanza para $\mu = 1.82$

Tabla 4.— Losa en voladizo ($\nu = 0.1$)

N \ μ		1.85	1.87	1.88	1.89	1.91
1	\bar{w}	.155	.155	.155	.155	.155
	\bar{M}_y	.458	.457	.457	.457	.457
	\bar{V}	-0.038683	-0.038690	-0.038690	-0.038688	-0.038677
2	\bar{w}	.155	.155	.155	.155	.155
	\bar{M}_y	.472	.472	.472	.472	.471
	\bar{V}	-0.038702	-0.038709	-0.038709	-0.038707	-0.038696
3	\bar{w}	.155	.155	.155	.155	.155
	\bar{M}_y	.477	.477	.477	.477	.477
	\bar{V}	-0.038704	-0.038711	-0.038711	-0.038709	-0.038699
4	\bar{w}	.155	.155	.155	.155	.155
	\bar{M}_y	.479	.479	.479	.479	.479
	\bar{V}	-0.038705	-0.038711	-0.038712	-0.038710	-0.038699

NOTA. La energía potencial total mínima se alcanza para $\mu = 1.88$

Tabla 5.— Losa en voladizo ($\nu = 0.2$)

N	$\mu = 1.79$ $\alpha_2 = -8.8 \times 10^{-4}$	
1	\bar{w}	0.142591
	\bar{M}_y	0.43117
	\bar{V}	-0.0356478
3	\bar{w}	0.142648
	\bar{M}_y	0.44346
	\bar{V}	-0.0356621

N		$\mu = 1.50$ $\alpha_2 = -0.17$	$\mu = 1.79$ $\alpha_2 = 0.$	$\mu = 2.00$ $\alpha_2 = 0.11$
1	\bar{V}	-0.0355678	-0.0356478	-0.0356136
3	\bar{V}	-0.0355847	-0.0356638	-0.0356302

Tabla 6.— Análisis de la sensibilidad de $\alpha_r (\beta_r = 0)$.

Se comprueba que la reducción del esfuerzo computacional con la consideración de elementos semiinfinitos de flexión es extraordinaria en comparación a un cálculo clásico. En este caso, el cálculo clásico ha exigido 415 gdl frente a únicamente 8 gdl para la placa discretizada con $N=4$.

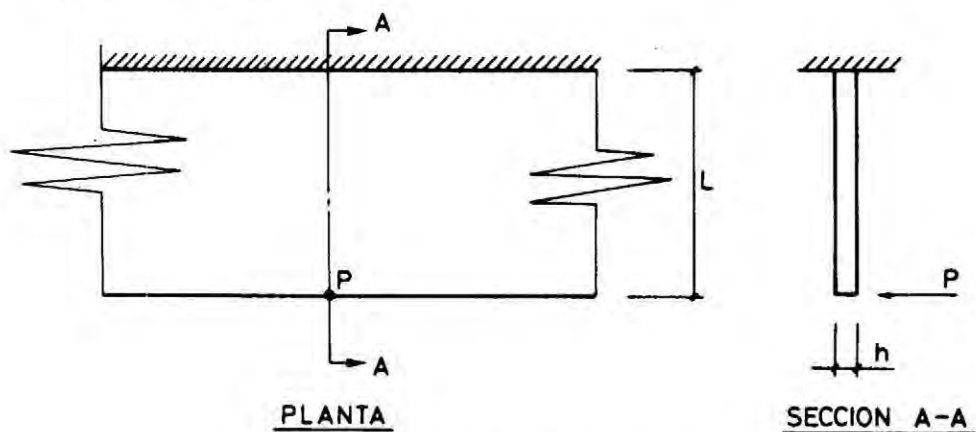


Figura 3.— Ejemplo de aplicación del elemento.

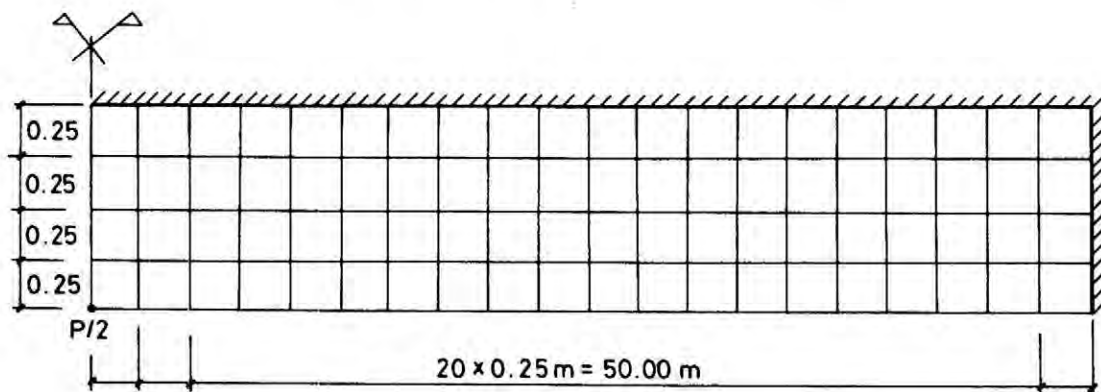


Figura 4.— Modelo en elementos finitos de flexión convencionales.

ELEMENTO VIGA

El elemento finito que se ha descrito en los apartados anteriores puede particularizarse a la situación monodimensional de viga semiinfinita. En este caso la expresión de los movimientos a lo largo de la directriz (eje y) es:

$$\begin{aligned} w(y) &= Y_0 w_1 + Y_1 \theta_{x1} \\ \theta_x(y) &= Y'_0 w_1 + Y'_1 \theta_{x1} \\ \theta_y(y) &= \theta_{y1} Y_0 + \theta_{yy1} Y_1 \end{aligned} \quad (25)$$

El vector curvatura es $\epsilon = \left[\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right]^T$ y por consiguiente, la matriz de rigidez es:

$$\begin{bmatrix} EI l_{00}^{22} & EI l_{01}^{22} & 0 \\ EI l_{10}^{22} & EI l_{11}^{22} & 0 \\ 0 & 0 & GJ \left(l_{00}^{11} - \frac{l_{01}^{11} l_{10}^{11}}{l_{11}^{11}} \right) \end{bmatrix} \quad (26)$$

con EI y GJ las rigideces de flexión y torsión de la sección transversal de la viga. El vector de movimientos asociado a esta matriz es $\mathbf{d} = [w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}]^T$.

Los elementos finitos anteriores, 2-D y 1-D, pueden combinarse dentro de un programa general de computador basado en el método de los movimientos o rigidez, sin ninguna dificultad, particularmente, si como es usual, la programación se ha diseñado de un modo estructurado y abierta para recibir nuevos elementos. Por otra parte, se puede incluir dentro de este programa, las dimensiones reales de la viga mediante el procedimiento matricial de las matrices de transformación de nudos de dimensión finita. En el ejemplo que sigue se analiza la anterior placa en voladizo, disponiendo un emparrillado de barras en la zona de máximos esfuerzos, es decir, cercana a la aplicación de las cargas, y los elementos semiinfinitos en la zona alejada de estas (Figura 5). Los resultados obtenidos en este caso, prácticamente concordantes con la solución anterior, son: $\bar{w} = 0,14438$; $\bar{m}_y = 0,4579$ y $\bar{V} = -0,0360940$.

POSIBLES EXTENSIONES

La formulación anterior que corresponde a un elemento de dos nudos puede ser extendida a otra que describe un elemento de M nudos; como se indica a continuación.

La variación de la flecha en este elemento, se define mediante la expresión:

$$w(x,y) = \mathbf{N}_0 \mathbf{d}_0 Y_0 + \mathbf{N}_1 \mathbf{d}_1 Y_1$$

siendo \mathbf{N}_0 un vector de funciones de forma de polinomios hermíticos, de dimensión $2M \times 1$, es decir, correspondientes a M nudos. El vector \mathbf{d}_0 de movimientos contiene el desplazamiento vertical w_i y el giro θ_{yi} de cada nudo i ($i = 1, 2, \dots, M$).

\mathbf{N}_1 es el vector de funciones de forma (polinomios de Lagrange) de dimensión $M \times 1$ correspondiente a M nudos y \mathbf{d}_1 el vector de movimientos conteniendo los giros θ_{xi} del nudo i .

Las funciones Y_0 e Y_1 se extienden ahora, permitiendo una variación de los parámetros μ , α_r y β_r con relación a la abscisa x , es decir:

$$Y_0 = (1 + \sum_{r=1}^R \alpha_r(x) \bar{y}^r) e^{-\bar{y}}$$

$$Y_1 = \frac{1}{\mu} \left(\sum_{r=1}^R \beta_r \bar{y}^r \right) e^{-\bar{y}}$$

con $\bar{y} = \mu y$, siendo

$$\mu = \mu(x) = \mu_0 + \mu_1 x + \dots + \mu_N x^N$$

$$\alpha_r(x) = \alpha_{r0} + \alpha_{r1} x + \dots + \alpha_{rN} x^N$$

$$\beta_r(x) = \beta_{r0} + \beta_{r1} x + \dots + \beta_{rN} x^N$$

$$\alpha_1(x) = \beta_1(x) = 1$$

Los valores de los parámetros μ_k , α_{rn} y β_{rn} se determinan mediante un proceso de minimización de la energía potencial total.

La matriz de rigidez del elemento se deduce según el procedimiento típico del método de los elementos finitos y su dimensión es de $3M \times 3M$. Las integrales pueden evaluarse numéricamente y la variación de las características elastomecánicas del elemento (espesor, módulo de elasticidad, etc.) según la dirección x deben de incluirse en el cálculo de la matriz de rigidez, convirtiendo a este elemento en menos versátil que el expuesto en los apartados anteriores.

CONCLUSIONES

Se ha presentado un elemento rectangular semiinfinito de flexión, que permite modelizar largas extensiones de placas con suficiente aproximación. Este elemento puede insertarse directamente dentro de un programa matricial de estructuras formulado en movimientos. Se ha indicado un criterio de obtención de los parámetros (en particular de la caída exponencial) que definen la función de forma en la dirección semiinfinita que si bien no está suficientemente justificado, conduce aparentemente a resultados adecuados.

AGRADECIMIENTOS

Uno de los autores desea expresar su agradecimiento a la Caja de Ahorros de Santander y Cantabria por la ayuda recibida para la realización de esta comunicación.

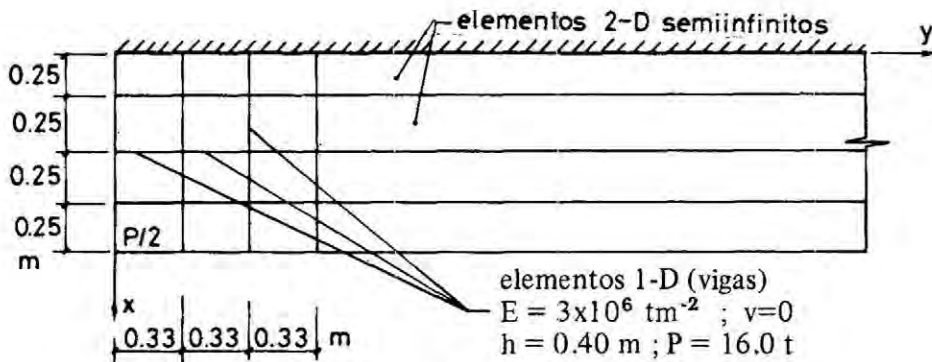


Figura 5.— Modelo de vigas y elementos semiinfinitos de flexión.

REFERENCIAS

1. P. Bettess y J. Bettess. "Infinite elements for static problems". *Engineering Computations*. Vol. 1, No. 1, Marzo (1984).
2. A. Samartín. "Cálculo de estructuras de puentes de hormigón". Editorial Rueda. (1983).
3. O. C. Zienkiewicz. "The Finite Element Method". McGraw-Hill. (1977).